Tentamen Lineaire Algebra 1, 28 januari 2010

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Bepaal de rij-echelonvorm van A.

b. Bepaal de rang van A. 3

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

2. Stel dat A en B $n \times n$ matrices zijn, en definieer een $2n \times 2n$ matrix door

$$M = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a. Toon aan: als A en B niet-singulier zijn dan is M is niet-singulier.

b. Stel dat A en B niet-singulier zijn. Bepaal de inverse van M. $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

c. Bekijk nu de matrixvergelijking

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

met als onbekenden de $n \times n$ matrices X en Y. Stel dat A en B niet-singulier zijn. Bepaal X en Y.

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - A^{-1} \\ I \end{pmatrix}$

3. Laat $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coefficienten. Voor $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren we het spoor $\mathrm{tr}(A)$ van A door

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Een matrix A heet symmetrisch indien $A^{\mathsf{T}} = A$. Laat S de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van symmetrische matrices. Laat L de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van alle matrices A zodat $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a. Toon aan dat L een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b. Toon aan dat S een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

c. Bepaal een basis van $L \cap S$. Wat is de dimensie van $L \cap S$? $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 2

d. Toon aan: voor alle $A \in L \cap S$ geldt $\det(A) \leq 0$.

e. Stel $A \in L \cap S$. Toon aan: A is singulier dan en slechts dan $A = 0$.

4. P_3 is de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan 3, met reële coefficienten. Definieer de afbeelding $T : P_3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$T(p(x)) := \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}$$

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is

b. Bepaal de matrix A van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2\}$ in P_3 en de standaard basis $F = \{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$

c. Bepaal de rang van A. 3

d. Wat volgt hieruit over de dimensie van de kern $\ker(T)$ van T? 0

e. Bepaal $\ker(T)$. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2

5. Stel A een reële $m \times n$ matrix en $b \in \mathbb{R}^m$. Beschouw de normaalvergelijking $A^\top Ax = A^\top b$.

- **a.** Toon aan: $A^\top A$ is niet-singulier dan en slechts dan als $\text{rang}(A) = n$.
- **b.** Toon aan: de normaalvergelijking heeft precies één oplossing $x \in \mathbb{R}^n$ dan en slechts dan als $A^\top A$ niet-singulier is.
- **c.** Stel $x \in \mathbb{R}^n$ een oplossing van de normaalvergelijking. Toon aan dat $Ax - b \perp R(A)$.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$

- **a.** Bepaal het karakteristieke polynoom van A.
- **b.** Bepaal de eigenwaarden van A. $\lambda = 1$
- **c.** Bepaal de eigenvectoren van A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15

$R(A) = \mathbb{R}^{m \times n}$

$(Ax-b)^T = Ax^T - b^T$

$= (A(A^TA)^{-1}A^Tb)^T - b^T$

$= (A^Tb)^T(A(A^TA)^{-1})^T - b^T$

$= (b^TA)((A^TA)^{-1^T}A^T) - b^T$

$= b^TA(AA^T)^{-1}A^T - b^T$

$= b^TI - b^T = 0$

$b^TA(AA^T)^{-1}A^T = b$

3